

# Matematika

Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y, & 0 < x < 2, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

- a) Spočtěte pravděpodobnost jevu  $X > Y$ .
- b) Určete marginální hustotu náhodné veličiny  $X$ .
- c) Spočtěte střední hodnotu náhodné veličiny  $X^2 + 1$ .

**Řešení:** a)

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \iint_{x>y} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_y^2 \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y \right) \, dx \right) \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}xy \right]_y^2 \, dy = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + y - \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{2}y^2 \right] \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + y - \frac{5}{8}y^2 \right] \, dy = \left[ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{5}{24}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

b)  $f_X(x) = 0$  pro  $x \notin (0, 2)$ , pro  $x \in (0, 2)$ :

$$f_X(x) = \int_0^1 \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y \right) \, dy = \left[ \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x + 1).$$

c)

$$\begin{aligned} E(X^2 + 1) &= E(X^2) + 1 = 1 + \int_0^2 x^2 \cdot f_X(x) \, dx = 1 + \int_0^2 \left( \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right) \, dx = \\ &= 1 + \left[ \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{12}x^3 \right]_0^2 = 1 + 1 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$